Bellavista, 17 de octubre, 2022

Señor(a):

RESOLUCIÓN DECANAL N° 120-2022-D-FCNM. - Bellavista 17 de octubre de 2022.- EL DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO:

Visto el Oficio Nº 04-2022-JET-EPM-FCNM y Oficio Nº 05-2022-JET-EPM-FCNM, recibido en forma virtual el 06 de octubre de 2022, por medio del cual el Presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta el Dictamen, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, e informa, que el proyecto titulado "CONJUNTOS EN $\mathbb{R}^n$ NO BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES", presentado por la Srta. Bachiller GUÍA RODRÍGUEZ LESLY ALEXANDRA y el Sr. Bachiller VALER RUIZ JUAN MANUEL, respectivamente, ha sido evaluado y se resuelve aprobarlo.

CONSIDERANDO:

Que, el Art. 32° de la Ley Universitaria Ley N° 30220, norma que las Facultades son unidades de formación académica, profesional y de gestión, el Art. 70° numeral 2, 3 y 5, norma las atribuciones del Decano, a través de los Directores de los Departamentos, Directores de las Escuelas Profesionales, Unidad de Investigación y la unidad de Posgrado, y las demás dependencias, respectivamente; a fin de lograr un desarrollo académico y administrativo eficaz y eficiente, concordante con la misión, visión y valores de la Facultad FCNM;

Que, mediante Resolución del Consejo Universitario Nº 099-2021-CU de fecha 30 de junio del año 2021, se aprobó el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado de la Universidad Nacional del Callao, señalando en el Art. 33° que la titulación profesional por la modalidad de tesis se realiza por uno de los dos procedimientos: a) Sin ciclo de tesis, y b) Con ciclo de tesis; asimismo, en su Art. 73° precisa sobre la documentación que debe presentar el estudiante o egresado para aprobar su proyecto de tesis y acceder a la titulación profesional mediante dicha modalidad;

Que, con Resolución Rectoral Nº 285-2021-R de fecha 17 de mayo de 2021, se aprobó la Directiva Nº 002-2021-R PARA LA TITULACIÓN PROFESIONAL POR LA MODALIDAD DE TESIS CON CICLO DE TALLER DE TESIS EN LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO;

Que, con RESOLUCIÓN DECANAL Nº 021-2019-D-FCNM de fecha 04 de febrero de 2019 se aprueba la APERTURA, INSCRIPCIÓN Y DESARROLLO DEL TERCER CICLO TALLER DE TESIS DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, designándose al mismo tiempo, al Profesor ordinario, adscrito al Departamento Académico de Matemática Lic. JUAN BENITO BERNUI BARROS, Coordinador del Tercer Ciclo Taller de Tesis, para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, cumpliendo con las funciones establecidas en los artículos 46°, 47° 48° y 49° del Reglamento de Grados y Títulos de la Universidad Nacional del Callao, aprobado mediante Resolución de Consejo Universitario Nº 099-2021-CU, de fecha el 30 de junio de 2021;

Que, con Resolución de Consejo de Facultad Nº 028-2021-CF-FCNM de fecha 15 de marzo del 2021, se aprobó el PROYECTO DEL III CICLO TALLER DE TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, que incluye el Cronograma de Actividades, docentes de cada módulo, Asesores, programación horaria, presupuesto y Personal Administrativo, con las modificaciones realizadas por el Consejo de Facultad, el mismo que consta de once (11) páginas;

Que, mediante Resolución Decanal Nº 087-2022-D-FCNM y Resolución Decanal Nº 088-2022-D-FCNM de fecha 26 de agosto de 2022, se Designó al Jurado Evaluador de Proyecto de Tesis para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática, del proyecto titulado: "CONJUNTOS EN $\mathbb{R}^n$ NO BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES", presentado por la Srta. Bachiller GUÍA RODRÍGUEZ LESLY ALEXANDRA y el Sr. Bachiller VALER RUIZ JUAN MANUEL respectivamente, Jurado que está integrado por los profesores: Dr. JULIO CÉSAR NÚÑEZ VILLA (Presidente), Dr. EDINSON MONTORO ALEGRE (Vocal), Dr. DIONICIO ORLANDO MORENO VEGA (Secretario), Lic. GABRIEL RODRÍGUEZ VARILLAS (Suplente);

Que, corrido el trámite de la solicitud de los recurrente, el presidente del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis presenta en forma virtual en mesa de partes de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, el 06 de octubre de 2022, el Dictamen del proyecto de Tesis titulado "CONJUNTOS EN $\mathbb{R}^n$ NO BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES", presentado por la Srta. Bachiller GUÍA RODRÍGUEZ LESLY ALEXANDRA y el Sr. Bachiller VALER RUIZ JUAN MANUEL, respectivamente; el cual ha sido evaluado en su forma y fondo, dictaminando su aprobación;

Que, estando vigente el Estado de Emergencia Nacional y de Aislamiento Social Obligatorio establecido en el marco del Decreto de Urgencia N° 026-2020 por las graves circunstancias que afectan la vida de la Nación a consecuencia del brote del COVID-19. Se ha emitido la Resolución de Consejo Universitario N° 068-2020-CU, de fecha 25 de marzo de 2020, mediante la cual se resuelve “autorizar con eficacia anticipada, del 16 de marzo de 2020, y hasta que concluya el estado de emergencia nacional, la modificación del lugar de la prestación de servicios docentes y administrativos;

Estando a lo glosado; a la documentación que obra en autos; a lo normado en el Reglamento de Grados y Títulos; y en uso de las atribuciones que le confiere el Art. 187° del Estatuto de la Universidad Nacional del Callao, modificado en Resolución de Asamblea Universitaria Nº 008-2022-AU, de fecha 28 de junio de 2022 y concordante con el Art. N° 70° de la ley universitaria, Ley N° 30220;

RESUELVE:

1º. APROBAR, con eficacia anticipada el Proyecto de Tesis para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática, titulado: “CONJUNTOS EN $\mathbb{R}^n$ NO BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES”, presentado por los Bachilleres, Srta. Bachiller GUÍA RODRÍGUEZ LESLY ALEXANDRA y el Sr. Bachiller VALER RUIZ JUAN MANUEL, en el Tercer Ciclo Taller de Tesis para la obtención del Título Profesional de Licenciado en Matemática, de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, de la Universidad Nacional del Callao.

2º. AUTORIZAR, a la Unidad de Investigación inscribir el tema de tesis y su autor señalado en la presente Resolución, en el Libro de Registro de Tesis, de acuerdo con el Reglamento de Grados y Títulos vigente.

3º. TRANSCRIBIR, la presente Resolución a los miembros del Jurado Evaluador, profesor asesor, Escuela Profesional y Departamento Académico de Matemática, Unidad de Investigación, Comisión de Grados y Títulos e interesados, para conocimiento y fines.

REGÍSTRESE, COMUNÍQUESE Y ARCHÍVESE

Fdo. **Dr. JUAN ABRAHAM MÉNDEZ VELÁSQUEZ**. -Decano y Presidente del Consejo de Facultad de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

Fdo. **Mg. GUSTAVO ALBERTO ALTAMIZA CHÁVEZ**.-Secretario Académico
Lo que transcribo a usted para los fines pertinentes.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

PROVEÍDO N°613-2022-D-FCNM

Ref. : **OFICIO N° 04-2022-JET-EPM-FCNM**
DICTAMEN N° 04-2022-JET-FCNM
Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis
III CICLO TALLER DE TESIS FCNM 2021
Bach. GUÍA RODRÍGUEZ, Lesly Alexandra
Escuela Profesional de Matemática

DERÍVESE, el documento indicado de la referencia a la **Oficina de Secretaría Académica de la FCNM**, para la emisión de la respectiva resolución.

Bellavista, 07 de octubre de 2022

Atentamente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

JAMV/hc
Archivo

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

JURADO EVALUADOR DE TESIS

(R. D. Nº 087-2022-D-FCNM)

Lima, 06 octubre 2022

OFICIO Nº 04-2022-JET-EPM-FCNM

Señor

Dr. Juan A. Méndez Velásquez
Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Presente.-

De mi consideración:

Tengo el agrado de dirigirme a usted para expresarle un cordial saludo y en atención al Memorando Nº 053-2022-D-FCNM, remitir a su despacho el expediente con el Dictamen del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis titulada: “Conjuntos en R no borelianos y no lebesgue medibles” presentado por la bachiller Guía Rodríguez Lesly Alexandra.

Atentamente,

…………………………………..
Dr Julio César Nuñez Villa
Presidente de Jurado Evaluador de Tesis

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

06 de octubre 2022

DICTAMEN N°04-2022- JET-FCNM

El Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis: "Conjuntos en R no borelianos y no lebesgue medibles" presentado por la bachiller Guía Rodríguez Lesly Alexandra, designado con Resolución Decanal Nº 087-2022-D-FCNM, reunido en sesión virtual ordinaria del día miércoles 05 de octubre a las 22: 20 hrs., revisan cuidadosamente el Proyecto de Tesis presentado, en forma y fondo; por lo que el Jurado de Proyecto de Tesis toman el siguiente:

ACUERDO:

1 º **Aprobar** el proyecto de tesis titulado: "Conjuntos en R no borelianos y no lebesgue medibles" presentado por la bachiller Guía Rodríguez Lesly Alexandra.

2º Remitir al Señor Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática el presentedictamen, acompañado la versión virtual del expediente respectivo para que, según lo dispuesto por el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado de la Universidad Nacional del Callao, se continúe con el trámite.

Dr. Julio César Nuñez Villa	Dr. Edinson Montoro Alegre	Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Evaluador de Tesis	Jurado Evaluador de Tesis	Jurado Evaluador de Tesis
PRESIDENTE	VOCAL	SECRETARIO

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Jurado Evaluador de Tesis
SUPLENTE

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

CITACION N° 004-2022-JEPT-FCNM

Señores

Dr. Nuñez Villa Julio César
Dr. Edinson Montoro Alegre
Dr. Dionicio Orlando Morena Vega
Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis
Presente.-
A través del presente cito a usted con carácter de urgencia a la reunión a llevarse a cabo en la fecha, hora y lugar siguientes:

Fecha : Miércoles 5 de octubre del 2022
Hora : 22:20
Enlace : https://meet.google.com/uaq-cygq-bbi

AGENDA

✓ Expediente de tesis "Conjuntos en Rn no bolereanos y no lebesgue medibles" de la Bachiller Guía Rodríguez Lesly Alexandra.

*Se adjunta RESOLUCIÓN DECANAL Nº 087-2022-D-FCNM

Lima, 5 de octubre del 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
JURADO EVALUADOR DE PROYECTO DE TESIS

Dr. Nuñez Villa Julio César
Presidente

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

CITACION N° 004-2022-JEPT-FCNM

Señores

Dr. Nuñez Villa Julio César
Dr. Edinson Montoro Alegre
Dr. Dionicio Orlando Morena Vega
Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Presente.-
A través del presente cito a usted con carácter de urgencia a la reunión a llevarse a cabo en la fecha, hora y lugar siguientes:

Fecha : Miércoles 5 de octubre del 2022
Hora : 22:20
Enlace : https://meet.google.com/uaq-cygq-bbi

AGENDA
✓ Expediente de tesis "Conjuntos en Rn no bolereanos y no lebesgue medibles" de la Bachiller Guía Rodríguez Lesly Alexandra.

*Se adjunta RESOLUCIÓN DECANAL Nº 087-2022-D-FCNM

Lima, 5 de octubre del 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
JURADO EVALUADOR DE PROYECTO DE TESIS

Dr. Nuñez Villa Julio César
Presidente

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

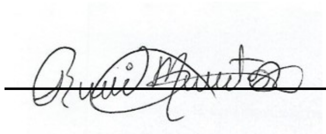
ASISTENCIA

(Miércoles 5 de octubre del 2022)

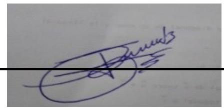
CITACION N° 004-2022-JEPT-FCNM
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Señores

Dr. Julio César Nuñez Villa 

Dr. Edinson Montoro Alegre 

Dr. Dionicio Orlando Morena Vega 

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas 

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

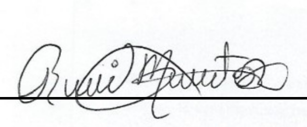
CARGO

(Miércoles 5 de octubre del 2022)

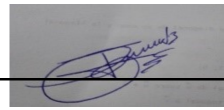
CITACION N° 004-2022-JEPT-FCNM
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Señores

Dr. Julio César Nuñez Villa 

Dr. Edinson Montoro Alegre 

Dr. Dionicio Orlando Morena Vega 

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas 

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

CONJUNTOS EN $\mathbb{R}$ NO BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES

Autores:
GUIA RODRIGUEZ LESLY ALEXANDRA
VALER RUIZ JUAN MANUEL

Asesor:
CASTILLO VALDIVIESO ABSALON

Línea de investigación:
Análisis numérico y Matemática Computacional.

Callao, 2022

PERÚ

Mg. Absalon Castillo

Valdivieso

Asesor

Lesly Alexandra Guia Rodriguez

Bachiller

Juan Manuel Valer Ruiz

Bachiller

INFORMACIÓN BÁSICA

1. **FACULTAD**: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. **UNIDAD DE INVESTIGACIÓN:** Departamento de Matemática
3. **TITULO**: CONJUNTOS EN ℝ NO BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES
4. **AUTORES**: Guia Rodriguez Lesly Alexandra

   ORCID: 0000-0002-8615-4515

   Valer Ruiz Juan Manuel

   ORCID: 0000-0002-8938-8253
5. **ASESOR**: Absalon Castillo Valdivieso

   ORCID: 0000-0002-6083-9321
6. **LUGAR DE EJECUCIÓN**: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática -UNAC
7. **TIPO DE INVESTIGACIÓN**: Básica
8. **UNIDADES DE ANÁLISIS**: Teoría de la medida, Conjuntos Lesbesgue medibles, Conjuntos Borelianos.
9. **Tema OCDE:** 1.01.01 (Matemática Pura)

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En éste trabajo vamos a dar a conocer algunas aplicaciones de recursiones transfinitas, mostrando la existencia de conjuntos Lebesgues medibles, pero no Borelianos y además se construirá el conjunto de Bernstein, que es un ejemplo de un conjunto que no es Lebesgue medible.

El principio de buen orden afirma que en cualquier conjunto de números naturales existe un mínimo, es decir, un número no mayor que algún otro del resto, siempre y cuando dicha colección no esté vacía. Esto diferencia al conjunto de los números naturales de otros conjuntos ordenados de números, como por ejemplo los números enteros o los números reales. El principio de buena ordenación es equivalente al principio de inducción: uno puede demostrarse a partir del otro.

Recordemos que podemos hablar de dos tipos de inducción: la ordinaria y la transfinita. La inducción transfinita es una extensión de la inducción matemática a (grandes) conjuntos bien ordenados, tales como conjuntos de ordinales o cardinales.

Cuando hablemos de conjunto de Bernstein es un óptimo ejemplo de conjuntos con propiedades no usuales. La construcción de ese conjunto envuelve muchos pasos, la inducción transfinita no será suficiente y para facilitar las demostraciones se presentará diversos lemas, todo eso con la intuición de probar la existencia de la construcción.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la Realidad Problemática

En el presente trabajo se pretende construir diversos ejemplos que muestren la existencia de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos y además describir los conjuntos de Bernstein que son conjuntos en los reales que no son Lebesgue medibles.

1.2 Formulación del problema

1.2.1 Problema General

- ¿Existen ejemplos de conjuntos en $\mathbb{R}$ no Borelianos y no Lebesgue medibles?

1.2.2 Problema Específico

- ¿Existen ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos?
- ¿Existen conjuntos en $\mathbb{R}$ no Lebesgue medibles?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

- Mostraremos ejemplos de conjuntos en $\mathbb{R}$ no Borelianos y no Lebesgue medibles.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Mostraremos ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos.

- Mostraremos ejemplos de conjuntos en $\mathbb{R}$ no Lebesgue medibles

1.4 Justificación

El siguiente trabajo está dedicado a todos los lectores que quieran y les guste aplicar métodos de teoría de conjuntos fuera de la teoría clásica de conjuntos, a partir de la Teoría de la medida.

La importancia de la Teoría de Conjuntos radica en que a partir de ella se pueda reconstruir toda la matemática, mientras que la teoría de la medida es de importancia central en la geometría, la probabilidad y en la estadística, ya que permite crear nuevas formas de medir conjuntos desde el punto de vista de la longitud, el área, el volumen, etc.

Es así que el motivo principal del presente trabajo es dar a conocer la importancia de estudiar la teoría de conjuntos y los métodos típicos de la teoría moderna de conjuntos como: la inducción transfinita, el lema de Zorn y la hipótesis del continuo, obteniendo resultados relevantes en el estudio de las σ-álgebras de los reales.

Se mostrará la existencia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ con algunas propiedades extrañas, como lo son los conjuntos de Bernstein. Para ello se desarrollarán temas como inducción y recursividad transitiva, aritmética cardinal, entre otros.

1.5 Delimitantes de la investigación

1.5.1 Teórica

No se aplica en este tipo de proyecto

1.5.2 Temporal

No se aplica en este tipo de proyecto

1.5.3 Espacial

No se aplica en este tipo de proyecto

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

2.1.1 Antecedentes Nacionales

No se encontró antecedentes nacionales.

2.1.2 Antecedentes Internacionales

CIESIELSKI, K. Set Theory for the Working Mathematician. England: Cambridge University Press, 1997.

En el texto el autor se concentra en los métodos típicos de teoría de conjuntos moderna: inducción transfinita, lema de Zorn, hipótesis del continuo. La elección de los temas y la forma en que se presentan está subordinada a un propósito: obtener las herramientas que son más útiles en las aplicaciones, especialmente en geometría abstracta, análisis, topología y álgebra. En particular, la mayoría de los métodos presentados en el libro van acompañados de muchas aplicaciones en geometría abstracta, análisis real y, en algunos casos, topología y álgebra.

ALFRED TARSKI'S WORK IN SET THEORY, AZRIEL LEVY. The Journal of Symbolic Logic, Mar., 1988, Vol. 53, No. 1 (Mar., 1988)

Un motivo central en el trabajo de Tarski en teoría de conjuntos, y también en lógica, fue la idea de algebraización. Tarski probablemente esperaba que un cálculo algebraico de la teoría de conjuntos hiciera que las sólidas herramientas desarrolladas en la teoría de conjuntos estuvieran disponibles para muchos casos diferentes, tanto en la teoría de conjuntos como fuera de ella. Esta algebraización se llevó a cabo principalmente en dos direcciones diferentes. Una dirección es la de las álgebras de Boole y sus modelos-campos de conjuntos naturales; nos referiremos a ella como la dirección algebraica booleana. Esta dirección resultó ser inmensamente exitosa y dio muchos frutos para la investigación en grandes cardenales y forzamiento. La otra dirección de la algebraización de la teoría de conjuntos llevada a cabo por Tarski es la del análisis de la acción de funciones uno-uno que conducen a las álgebras cardinales y ordinales; nos referiremos a ella como la dirección algebraica. Tarski y algunos de sus alumnos invirtieron mucho trabajo e ingenio en esta dirección, pero no resultó ser una fuente importante de matemáticas fructíferas. El modelo principal para la dirección algebraica fue la teoría aditiva finita e infinita de los cardinales en ausencia del axioma de elección, posiblemente en presencia de alguna versión débil de este axioma. El axioma completo de elección permite operaciones de carácter altamente no constructivo, y no es probable que uno pueda algebraizarlas de ninguna manera útil. Por tanto, los teoremas teóricos de conjuntos que mencionaremos en nuestra descripción de esta dirección serán teoremas demostrables sin utilizar el axioma de elección.

On the Berstein–Svarc theorem in dimension 2 ,BY ALEXANDER N. DRANISHNIKOV AND YULI B. RUDYAK, Department of Mathematics, University of Florida, 358 Little Hall, Gainesville, FL 32611, U.S.A.

2.2 Bases teóricas

Esta sección está dedicada a mostrar el contenido teórico necesario para la realización del presente trabajo, con esta finalidad seguiremos los resultados mostrados en LEFSCHETZ, S. Introduction to Topology. United States: Princeton University Press, 2015 ; y Folland, G.B. 1999. Real Analysis: Modern Techniques and their Applications. 2nd edition. John Wiley & Sons Inc.

2.2.1 Buen orden

Definición 1:

Dada $\preceq$ una orden sobre X , decimos que $\preceq$ es una ***buen orden*** si, dado cualquier $A \subset X$ no vacio, existe $a \in A$ tal que $a = \min A$, esto es, $a \preceq b$, para todo $b \in A$.

2.2.2 Ordinales

La idea de definir números ordinales es para que

$\propto < \beta$ si y solo si $\alpha \in \beta$, y $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$

Definición 2:

Decimos que un conjunto X es ***transitivo*** si, para todo $y \in X$, tenemos que $y \subset X$.

Definición 3:

Un conjunto es un numero ordinal (un ordinal) si él es transitivo y bien ordenado por $\in$.

Denotaremos ordinales con letras griegas minúsculas $\propto$, β, γ, etc. La clase de todos los ordinales es denotada por *Ord.*

Definimos

$$\alpha < \beta \ si \ y \ solo \ si \ \propto \in \beta$$

Y $$\propto \leq \beta \ si \ y \ solo \ si \ (\alpha < \beta \ \ o \ \ \alpha = \beta)$$

Definición 4:

Sea $\propto$ un ordinal. Si $\propto = \beta + 1$ para algún β ordinal, decimos que $\propto$ es un ***ordinal sucesor***. Si $\propto$ no es un ordinal sucesor, entonces $\propto = \sup \{\beta : \beta < \propto\} = \bigcup \propto$, $\propto$ es llamado ***ordinal límite***.

Note que todo $n \in \omega = \{0,1,2,\dots\}$ no vacío es un ordinal sucesor. Note también que ω es un ordinal límite.

2.2.3 Topología en los ordinales

Fijando un ordinal $\propto$, hay una topología muy natural en él, la topología del orden:

Definición 5:

Dado un ordinal $\propto$, llamamos de ***topología del orden*** a la topología generada por los conjuntos de la forma

$$[0,\xi[\ ,\ ]\xi,\eta[\ \ y\ ]\eta,\alpha[$$

Donde $\xi, \eta \in \alpha$

Definición 6:

Un espacio topológico X es llamado un espacio T_2 o ***espacio de Hausdorff,*** si para todo par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existen conjuntos abiertos U_1, U_2 tales que

$$x_1 \in U_1, \qquad x_2 \in U_2 \quad y \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Definición 7:

Un espacio topológico X es llamado ***separable*** si existe un subconjunto numerable D de X tal que $\overline{D} = X$

Definición 8:

Sea X un espacio topológico y $x \in X$.

- Un conjunto $N \subseteq X$ es llamado una vecindad de x en X si existe un conjunto abierto U con $x \in U \subseteq N$.
- Una *base de vecindades* en x es una familia $ß_x$ de vecindades de x (en X) tal que toda vecindad de x contiene algún miembro de $ß_x$.

Definición 9:

Un espacio topológico X es llamado ***primero numerable*** si X tiene una base de vecindades numerable en cada punto.

Definición 10:

Un espacio topológico X es llamado ***segundo numerable*** si existe una base numerable de abiertos para X .

Definición 11:

Un espacio topológico X es llamado ***secuencialmente compacto*** si X es *Hausdorff* y toda sucesión de puntos de X tiene una subsucesión convergente.

$\boldsymbol{\omega_1}$, el primer ordinal no numerable

Definición 12:

Llamamos de ω_1 un conjunto bien ordenado y no numerable tal que para cada $\propto \in \omega_1$, el conjunto $\{\beta \in \omega_1 : \beta < \alpha \}$ es numerable.

2.2.4 Cardinales

Definición 13:

Dos conjuntos A, B tienen la misma cardinalidad *(número cardinal, cardinal)*, y escribimos $A \approx B$ si existe una biyección $f : A \longrightarrow B$.

Definición 14:

El numero ordinal más pequeño con esta propiedad se llama cardinalidad de A y se denota por $|A|$. Esto es,

$$|A| = \min\{\propto : \propto \, es\ ordinal\ y\ A \approx \propto\}$$

2.3 Marco conceptual

2.3.1 Teoría de conjuntos

Es una rama de la lógica matemática que estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos: colecciones abstractas de objetos, consideradas como objetos en sí mismas. Los conjuntos y sus operaciones más elementales son una herramienta de cualquier teoría matemática.

2.3.2 Teorema del buen orden

El teorema del buen orden establece que todo conjunto puede ser bien ordenado. Un conjunto X esta bien ordenado por un orden estricto si todo subconjunto no vacio de X tiene un elemento mínimo bajo dicho orden.

2.3.3 Espacio Topológico

Un espacio topológico es una estructura matemática que permite la definición formal de conceptos como convergencia, conectividad, continuidad, vecindad, usando subconjuntos de un conjunto dado.

2.3.4 Axioma de elección

En teoría de conjuntos, el axioma de elección es un axioma que postula que, para cada familia de conjuntos no vacíos, existe otro conjunto que contiene un elemento de cada uno de aquellos.

2.3.4.1 Conjunto de Bernstein

Un subconjunto B de R es un conjunto de Bernstein si tanto B como su complemento corta a cada cerrado no numerable. Esta propiedad hace que los conjuntos de Bernstein sean bastantes fieros, o en términos más finos, ‘irregulares’.

2.4 Definiciones de términos básicos

2.4.1 Espacios Topológicos

Definición 15:

Un espacio topológico es una pareja (X,τ) tal que X es un conjunto y τ una colección de subconjuntos de X tales que satisfacen

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. $U_1, \dots, U_n \in \tau \implies \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$
3. $U_\alpha \in \tau,\ para\ todo\ \alpha \in I \implies \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$

Definición 16:

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es cerrado si y solo si su complemento A^c es abierto. La cerradura $\bar{A}$ de A es la intersección de todos los cerrados que contiene a A, El interior $A°$ de A la definimos como la unión de todos los subconjuntos abiertos de A.

Definición 17:

Sea $a \in R^n$ y $r > 0$. Llamamos bola abierta de centro a y radio r al conjunto

$$B_r(a) = \{x \in R^n : d(x, a) < r\}$$

Definición 18:

Sea $a \in R^n$ y $r > 0$. Llamamos bola abierta de centro a y radio r al conjunto

$$B_r(a) = \{x \in R^n : d(x, a) \leq r\}$$

Definición 19:

Sea $A \subseteq R^n$ es abierto si para todo $x \in A$, existe $r \geq 0$ tal que $B_r(x) \subseteq A$.

Definición 20:

Un conjunto $A \subseteq R^n$ es cerrado si su complemento es un conjunto abierto.

2.4.2 Medida de Lebesgue

Se considera la medida m de Lebesgue en la recta real R.

2.4.3 Conjuntos medibles.

Se considera los conjuntos medibles los cuales forman el σ-álgebra, el cual contiene el σ-álgebra de Borel B.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

3.1.1 Hipótesis general

- Existen ejemplos de conjuntos en $\mathbb{R}$ no Borelianos y no Lebesgue medibles.

3.1.2 Hipótesis Específica

- Existen ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos
- Existen conjuntos en $\mathbb{R}$ no Lebesgue medible

3.2 Definición conceptual de variables.

3.2.1 Variable Independiente (I):

Conjuntos en $\mathbb{R}$

Dado el conjunto de los reales consideraremos a los conjuntos en $\mathbb{R}$ como todos los elementos del conjunto de partes de $\mathbb{R}$. El conjunto de partes de $\mathbb{R}$ en particular es el mayor σ-álgebra sobre los reales.

3.2.2 Variables dependientes (D):

Conjuntos Borelianos y conjuntos Lebesgue medibles

Un conjunto de Borel es un elemento de la llamada σ-álgebra de Borel, la cual no es más que la mínima σ-álgebra que contiene a una topología dada.

Un conjunto *B* de $\mathbb{R}^n$ se dirá medible si, para todo conjunto A, se verifica la siguiente identidad:

$$m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \setminus B).$$

Donde m* es la medida exterior de Lebesgue.

3.2.1 Operacionalización de las variables

Variables	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
I Conjuntos en $\mathbb{R}$	Topología Cardinalidad Lema de Zorn	Topología en ordinales Hipótesis del Continuo Principio de Elección	Método de escritorio o de biblioteca.	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación.
D	Conjuntos Borelianos Conjuntos Lebesgue medible Medida de conjuntos	Conjuntos abiertos. Medida exterior. σ-álgebras	Método de escritorio o de biblioteca.	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación.

Fuente: Elaboración propia

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1 Tipo y diseño de investigación

4.1.1 Tipo de Investigación

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.

4.1.2 Diseño de la Investigación

La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo – deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

Se empezará definiendo los términos básicos relacionados a la topología y a la teoría de la medida, posteriormente se encontrará los resultados analizando la topología sobre los reales y estudiando las diferentes σ-álgebras que se pueden generar sobre ellos.

Finalmente se expondrán ejemplos que son Lebesgue medibles pero no Borelianos y en particular se construirán los conjuntos de Bernstein que ejemplifica un subconjunto de los reales que no es Lebesgue medible.

4.2 Método de investigación

Por la naturaleza de la investigación, al ser tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación.

4.3 Población y muestra

No se aplica en este tipo de proyecto.

4.4 Lugar de estudio

El lugar de estudio para el presente proyecto de investigación se desarrolló en la biblioteca especializada y laboratorio de la Facultad De Ciencias Naturales Y Matemática, biblioteca central de la Universidad Nacional Del Callao.

4.5 Técnicas e instrumentación para la recolección de información

La técnica aplicada al presente trabajo proyecto de investigación fue la técnica del análisis documentario, cualitativo. Ello se basa en el análisis de documentos existentes en artículos, libros, revistas científicas. Acorde a nuestra investigación no se aplica instrumento de recolección de información

4.6 Análisis y procesamiento de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)

4.7 Aspectos Éticos en Investigación.

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

4.8 Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este tipo de proyecto.

4.9 Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto

VI. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

CRONOGRAMA DE PROYECTO DE TESIS

Proyecto de tesis: ¨CONJUNTOS EN R NO BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES"
Tesistas Guia Rodriguez Lesly Alexandra
Valer Ruiz Juan Manuel
Fecha de Inicio: 03/05/2021
Fecha de término: 03/11/2022

ACTIVIDADES	INICIO	FINAL	DUR. (Semanas)	MAYO				JUNIO				JULIO				AGOSTO			
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Capacitación Teórica	**03/05/2021**	23/05/2021	**3**																
Componente 1: Recopilación de material bibliográfico, selección y análisis del tema.	**24/05/2021**	20/06/2021	**4**																
Componente 2: Infinitos conjuntos Lebesgue medibles pero no Borelianos.Conjuntos de Bernstein	**21/06/2021**	18/07/2021	**4**																
Análisis y discusión de resultados	**19/07/2021**	15/08/2021	**3**																
Digitalización y defensa de tesis	**16/08/2021**	**03/11/2022**	**2**																

LEYENDA
Controles y revisiones por asesor
Clases, revisiones y presentaciones de avance

VII. PRESUPUESTO

ESPECIFICACIONES	PORCENTAJE (%)	COSTO (S/)
Laptop	31,25	3000.00
Textos de especialidad	10,42	1000.00
Servicios de internet	4,17	400.00
Fotocopias y espiralados	1,04	100.00
Tipeos de impresión	2,08	200.00
Papel de impresión	1,04	100.00
Material de escritorio	4,17	400.00
Empastado de tesis	2,08	200.00
Ciclo tesis	43,75	4200.00
total	100	9600.00

Fuente: Elaboración Propia

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ciesielski, K. (1997). *Set Theory for the Working Mathematician.* England: Cambridge University Press, 1997.

Lefschetz, S. (2015). *Introduction to Topology.* United States: Princeton University Press.

Tomas, J. (2003). *Springer- Verlag Berlin Heidelberg.*

Levy, A. (1979). *Basic Set Theory.* New York: Springer- Verlag.

Mirimanoff, D. (1917). *Les antinomies de Russel et de Burali-Forti et le probleme fundamental de la theorie des ensembles. L'Enseignement Math.* 19: 37-52.

Leandro Aurichi.(2020). Topologia e conjuntos em exercicios. Disponible en: (http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/aurichi/exerc)

Royden, H. L. (1988). *Real Analysis.* 3d ed. New York: Macmillan.

Ryszard E. (1989). *General Topology.* Sigma Series in Pure Mathematics.

Geral B.(1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applicagtions.* Wiley.

Stephen W. (2004). *General Topology.* Dover Publications,

VIII. ANEXOS

8.1 Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Variables
. **Problema General** ¿Existen ejemplos de conjuntos en R no Borelianos y no Lebesgue medibles?	**Objetivo General** Mostraremos ejemplos de conjuntos en R no Borelianos y no Lebesgue medibles.	**Hipótesis general** Existen ejemplos de conjuntos en R no Borelianos y no Lebesgue medibles.	**Tipo de Investigación** La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios. **Diseño de la Investigación** La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo – deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. Se empezará definiendo los términos básicos relacionados a la topología y a la teoría de la medida, posteriormente se encontrará los resultados analizando la topología sobre los reales y estudiando las diferentes σ-álgebras que se pueden generar sobre ellos. Finalmente se expondrán ejemplos que son Lebesgue medibles pero no Borelianos y en particular se construirán los conjuntos de Bernstein que ejemplifica un subconjunto de los reales que no es Lebesgue medible. **Método de investigación** Por la naturaleza de la investigación, al ser tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación. **Población y muestra** Población: Conjuntos en R. Muestra: σ-álgebras en R **Lugar de estudio** Se puede considerar lugar de estudio todo espacio físico que contribuya en la elaboración del presente trabajo, por ejemplo, la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC, la Biblioteca Central de la UNAC, pero debido a la situación actual originado por el COVID-19 el lugar de estudio será en mi hogar. **Técnicas e instrumentación para la recolección de información** Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida relacionada al tema de interés. **Análisis y procesamiento de datos** Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)	**Variable 1**. Conjuntos en R **Variable 2** Conjuntos Borelianos Conjuntos Lebesgue medible
Problema Específico ¿Existen ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos? ¿Existen conjuntos en R no Lebesgue medibles?	**Objetivos Específicos** Mostraremos ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos. Mostraremos ejemplos de conjuntos en R no Lebesgue medibles	**Hipótesis Específica** Existen ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos. Existen conjuntos en R no Lebesgue medible		

Fuente: Elaboración propia.

PROVEÍDO N°618-2022-D-FCNM

Ref. : **OFICIO N° 05-2022-JET-EPM-FCNM**
DICTAMEN N° 05-2022-JET-FCNM
Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis
III CICLO TALLER DE TESIS FCNM 2021
Bach. VALER RUIZ, Juan Manuel
Escuela Profesional de Matemática

DERÍVESE, el documento indicado de la referencia a la **Oficina de Secretaría Académica de la FCNM**, para la emisión de la respectiva resolución.

Bellavista, 07 de octubre de 2022

Atentamente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

JAMV/hc
Archivo

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

JURADO EVALUADOR DE TESIS

(R. D. Nº 088-2022-D-FCNM)

Lima, 06 octubre 2022

OFICIO Nº 05-2022-JET-EPM-FCNM

Señor

Dr. Juan A. Méndez Velásquez
Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Presente.-

De mi consideración:

Tengo el agrado de dirigirme a usted para expresarle un cordial saludo y en atención al Memorando Nº 054-2022-D-FCNM, remitir a su despacho el expediente con el Dictamen del Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis titulada: "Conjuntos en R no borelianos y no lebesgue medibles" presentado por el bachiller Valer Ruiz Juan Manuel.

Atentamente,

……………………………………..
Dr Julio César Nuñez Villa
Presidente de Jurado Evaluador de Tesis

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

06 de octubre 2022

DICTAMEN N°05-2022- JET-FCNM

El Jurado Evaluador del Proyecto de Tesis: "Conjuntos en R no borelianos y no lebesgue medibles" presentado por el bachiller Valer Ruiz Juan Manuel, designado con Resolución Decanal Nº 088-2022-D-FCNM, reunido en sesión virtual ordinaria del día miércoles 05 de octubre a las 22: 40 hrs., revisan cuidadosamente el Proyecto de Tesis presentado, en forma y fondo; por lo que el Jurado de Proyecto de Tesis toman el siguiente:

ACUERDO:

1 º **Aprobar** el proyecto de tesis titulado: "Conjuntos en R no borelianos y no lebesgue medibles" presentado por el bachiller Valer Ruiz Juan Manuel.

2º Remitir al Señor Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática el presente dictamen, acompañado la versión virtual del expediente respectivo para que, según lo dispuesto por el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado de la Universidad Nacional del Callao, se continúe con el trámite.

Dr. Julio César Nuñez Villa
Evaluador de Tesis
PRESIDENTE

Dr. Edinson Montoro Alegre
Jurado Evaluador de Tesis
VOCAL

Dr. Dionicio Orlando Moreno Vega
Jurado Evaluador de Tesis
SECRETARIO

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Jurado Evaluador de Tesis
SUPLENTE

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

CITACION N° 005-2022-JEPT-FCNM

Señores

Dr. Nuñez Villa Julio César
Dr. Edinson Montoro Alegre
Dr. Dionicio Orlando Morena Vega
Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis
<u>Presente</u>.-
A través del presente cito a usted con carácter de urgencia a la reunión a llevarse a cabo en la fecha, hora y lugar siguientes:

Fecha : Miércoles 5 de octubre del 2022
Hora : 22:40
Enlace : https://meet.google.com/uaq-cygq-bbi

<u>AGENDA</u>

- ✓ Expediente de tesis "Conjuntos en Rn no bolereanos y no lebesgue medibles" del Bachiller Valer Ruiz Juan Manuel.

*Se adjunta RESOLUCIÓN DECANAL Nº 088-2022-D-FCNM

Lima, 5 de octubre del 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
JURADO EVALUADOR DE PROYECTO DE TESIS

Dr. Nuñez Villa Julio César
Presidente

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

CITACION N° 005-2022-JEPT-FCNM

Señores

Dr. Nuñez Villa Julio César
Dr. Edinson Montoro Alegre
Dr. Dionicio Orlando Morena Vega
Lic. Gabriel Rodríguez Varillas
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

<u>Presente</u>.-
A través del presente cito a usted con carácter de urgencia a la reunión a llevarse a cabo en la fecha, hora y lugar siguientes:

Fecha : Miércoles 5 de octubre del 2022
Hora : 22:40
Enlace : https://meet.google.com/uaq-cygq-bbi

<u>AGENDA</u>
- ✓ Expediente de tesis "Conjuntos en Rn no bolereanos y no lebesgue medibles" del Bachiller Valer Ruiz Juan Manuel.

*Se adjunta RESOLUCIÓN DECANAL Nº 088-2022-D-FCNM

Lima, 5 de octubre del 2022

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA
JURADO EVALUADOR DE PROYECTO DE TESIS

Dr. Nuñez Villa Julio César
Presidente

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

ASISTENCIA
(Miércoles 5 de octubre del 2022)

CITACION N° 005-2022-JEPT-FCNM
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Señores

Dr. Julio César Nuñez Villa ____________________

Dr. Edinson Montoro Alegre ____________________

Dr. Dionicio Orlando Morena Vega ____________________

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas ____________________

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
JURADO EVALUADOR DE TESIS

CARGO
(Miércoles 5 de octubre del 2022)

CITACION N° 005-2022-JEPT-FCNM
Miembros del Jurado Evaluador de Tesis

Señores

Dr. Julio César Nuñez Villa ____________________

Dr. Edinson Montoro Alegre ____________________

Dr. Dionicio Orlando Morena Vega ____________________

Lic. Gabriel Rodríguez Varillas ____________________

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

PROYECTO DE INVESTIGACIÓN:

CONJUNTOS EN $\mathbb{R}$ NO BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES

Autores:
GUIA RODRIGUEZ LESLY ALEXANDRA
VALER RUIZ JUAN MANUEL

Asesor:
CASTILLO VALDIVIESO ABSALON

Línea de investigación:
Análisis numérico y Matemática Computacional.

Callao, 2022

PERÚ

Mg. Absalon Castillo

Valdivieso

Asesor

Lesly Alexandra Guia Rodriguez

Bachiller

Juan Manuel Valer Ruiz

Bachiller

INFORMACIÓN BÁSICA

1. **FACULTAD**: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
2. **UNIDAD DE INVESTIGACIÓN:** Departamento de Matemática
3. **TITULO**: CONJUNTOS EN $\mathbb{R}$ NO BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES
4. **AUTORES**: Guia Rodriguez Lesly Alexandra

   ORCID: 0000-0002-8615-4515

   Valer Ruiz Juan Manuel

   ORCID: 0000-0002-8938-8253
5. **ASESOR**: Absalon Castillo Valdivieso

   ORCID: 0000-0002-6083-9321
6. **LUGAR DE EJECUCIÓN**: Facultad de Ciencias Naturales y Matemática -UNAC
7. **TIPO DE INVESTIGACIÓN**: Básica
8. **UNIDADES DE ANÁLISIS**: Teoría de la medida, Conjuntos Lesbesgue medibles, Conjuntos Borelianos.
9. **Tema OCDE:** 1.01.01 (Matemática Pura)

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En éste trabajo vamos a dar a conocer algunas aplicaciones de recursiones transfinitas, mostrando la existencia de conjuntos Lebesgues medibles, pero no Borelianos y además se construirá el conjunto de Bernstein, que es un ejemplo de un conjunto que no es Lebesgue medible.

El principio de buen orden afirma que en cualquier conjunto de números naturales existe un mínimo, es decir, un número no mayor que algún otro del resto, siempre y cuando dicha colección no esté vacía. Esto diferencia al conjunto de los números naturales de otros conjuntos ordenados de números, como por ejemplo los números enteros o los números reales. El principio de buena ordenación es equivalente al principio de inducción: uno puede demostrarse a partir del otro.

Recordemos que podemos hablar de dos tipos de inducción: la ordinaria y la transfinita. La inducción transfinita es una extensión de la inducción matemática a (grandes) conjuntos bien ordenados, tales como conjuntos de ordinales o cardinales.

Cuando hablemos de conjunto de Bernstein es un óptimo ejemplo de conjuntos con propiedades no usuales. La construcción de ese conjunto envuelve muchos pasos, la inducción transfinita no será suficiente y para facilitar las demostraciones se presentará diversos lemas, todo eso con la intuición de probar la existencia de la construcción.

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 Descripción de la Realidad Problemática

En el presente trabajo se pretende construir diversos ejemplos que muestren la existencia de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos y además describir los conjuntos de Bernstein que son conjuntos en los reales que no son Lebesgue medibles.

1.2 Formulación del problema

1.2.1 Problema General

- ¿Existen ejemplos de conjuntos en $\mathbb{R}$ no Borelianos y no Lebesgue medibles?

1.2.2 Problema Específico

- ¿Existen ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos?
- ¿Existen conjuntos en $\mathbb{R}$ no Lebesgue medibles?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

- Mostraremos ejemplos de conjuntos en $\mathbb{R}$ no Borelianos y no Lebesgue medibles.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Mostraremos ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos.

- Mostraremos ejemplos de conjuntos en $\mathbb{R}$ no Lebesgue medibles

1.4 Justificación

El siguiente trabajo está dedicado a todos los lectores que quieran y les guste aplicar métodos de teoría de conjuntos fuera de la teoría clásica de conjuntos, a partir de la Teoría de la medida.

La importancia de la Teoría de Conjuntos radica en que a partir de ella se pueda reconstruir toda la matemática, mientras que la teoría de la medida es de importancia central en la geometría, la probabilidad y en la estadística, ya que permite crear nuevas formas de medir conjuntos desde el punto de vista de la longitud, el área, el volumen, etc.

Es así que el motivo principal del presente trabajo es dar a conocer la importancia de estudiar la teoría de conjuntos y los métodos típicos de la teoría moderna de conjuntos como: la inducción transfinita, el lema de Zorn y la hipótesis del continuo, obteniendo resultados relevantes en el estudio de las σ-álgebras de los reales.

Se mostrará la existencia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ con algunas propiedades extrañas, como lo son los conjuntos de Bernstein. Para ello se desarrollarán temas como inducción y recursividad transitiva, aritmética cardinal, entre otros.

1.5 Delimitantes de la investigación

1.5.1 Teórica

No se aplica en este tipo de proyecto

1.5.2 Temporal

No se aplica en este tipo de proyecto

1.5.3 Espacial

No se aplica en este tipo de proyecto

II. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

2.1.1 Antecedentes Nacionales

No se encontró antecedentes nacionales.

2.1.2 Antecedentes Internacionales

CIESIELSKI, K. Set Theory for the Working Mathematician. England: Cambridge University Press, 1997.

En el texto el autor se concentra en los métodos típicos de teoría de conjuntos moderna: inducción transfinita, lema de Zorn, hipótesis del continuo. La elección de los temas y la forma en que se presentan está subordinada a un propósito: obtener las herramientas que son más útiles en las aplicaciones, especialmente en geometría abstracta, análisis, topología y álgebra. En particular, la mayoría de los métodos presentados en el libro van acompañados de muchas aplicaciones en geometría abstracta, análisis real y, en algunos casos, topología y álgebra.

ALFRED TARSKI'S WORK IN SET THEORY, AZRIEL LEVY. The Journal of Symbolic Logic, Mar., 1988, Vol. 53, No. 1 (Mar., 1988)

Un motivo central en el trabajo de Tarski en teoría de conjuntos, y también en lógica, fue la idea de algebraización. Tarski probablemente esperaba que un cálculo algebraico de la teoría de conjuntos hiciera que las sólidas herramientas desarrolladas en la teoría de conjuntos estuvieran disponibles para muchos casos diferentes, tanto en la teoría de conjuntos como fuera de ella. Esta algebraización se llevó a cabo principalmente en dos direcciones diferentes. Una dirección es la de las álgebras de Boole y sus modelos-campos de conjuntos naturales; nos referiremos a ella como la dirección algebraica booleana. Esta dirección resultó ser inmensamente exitosa y dio muchos frutos para la investigación en grandes cardenales y forzamiento. La otra dirección de la algebraización de la teoría de conjuntos llevada a cabo por Tarski es la del análisis de la acción de funciones uno-uno que conducen a las álgebras cardinales y ordinales; nos referiremos a ella como la dirección algebraica. Tarski y algunos de sus alumnos invirtieron mucho trabajo e ingenio en esta dirección, pero no resultó ser una fuente importante de matemáticas fructíferas. El modelo principal para la dirección algebraica fue la teoría aditiva finita e infinita de los cardinales en ausencia del axioma de elección, posiblemente en presencia de alguna versión débil de este axioma. El axioma completo de elección permite operaciones de carácter altamente no constructivo, y no es probable que uno pueda algebraizarlas de ninguna manera útil. Por tanto, los teoremas teóricos de conjuntos que mencionaremos en nuestra descripción de esta dirección serán teoremas demostrables sin utilizar el axioma de elección.

On the Berstein–Svarc theorem in dimension 2 ,BY ALEXANDER N. DRANISHNIKOV AND YULI B. RUDYAK, Department of Mathematics, University of Florida, 358 Little Hall, Gainesville, FL 32611, U.S.A.

2.2 Bases teóricas

Esta sección está dedicada a mostrar el contenido teórico necesario para la realización del presente trabajo, con esta finalidad seguiremos los resultados mostrados en LEFSCHETZ, S. Introduction to Topology. United States: Princeton University Press, 2015 ; y Folland, G.B. 1999. Real Analysis: Modern Techniques and their Applications. 2nd edition. John Wiley & Sons Inc.

2.2.1 Buen orden

Definición 1:

Dada $\preceq$ una orden sobre X , decimos que $\preceq$ es una ***buen orden*** si, dado cualquier $A \subset X$ no vacio, existe $a \in A$ tal que $a = \min A$, esto es, $a \preceq b$, para todo $b \in A$.

2.2.2 Ordinales

La idea de definir números ordinales es para que

$\propto < \beta$ si y solo si $\alpha \in \beta$, y $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$

Definición 2:

Decimos que un conjunto X es ***transitivo*** si, para todo $y \in X$, tenemos que $y \subset X$.

Definición 3:

Un conjunto es un numero ordinal (un ordinal) si él es transitivo y bien ordenado por $\in$.

Denotaremos ordinales con letras griegas minúsculas $\propto$, β, γ, etc. La clase de todos los ordinales es denotada por *Ord.*

Definimos

$$\alpha < \beta \; si \; y \; solo \; si \; \propto \in \beta$$

Y $$\propto \leq \beta \; si \; y \; solo \; si \; (\alpha < \beta \;\; o \;\; \alpha = \beta)$$

Definición 4:

Sea $\propto$ un ordinal. Si $\propto = \beta + 1$ para algún β ordinal, decimos que $\propto$ es un ***ordinal sucesor***. Si $\propto$ no es un ordinal sucesor, entonces $\propto = \sup\{\beta : \beta < \propto\} = \bigcup \propto$, $\propto$ es llamado ***ordinal límite***.

Note que todo $n \in \omega = \{0,1,2,\dots\}$ no vacío es un ordinal sucesor. Note también que ω es un ordinal límite.

2.2.3 Topología en los ordinales

Fijando un ordinal $\propto$, hay una topología muy natural en él, la topología del orden:

Definición 5:

Dado un ordinal $\propto$, llamamos de ***topología del orden*** a la topología generada por los conjuntos de la forma

$$[0,\xi[\, ,\,]\xi,\eta[\;\; y \;\,]\eta,\alpha[$$

Donde $\xi, \eta \in \alpha$

Definición 6:

Un espacio topológico X es llamado un espacio T_2 o ***espacio de Hausdorff,*** si para todo par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existen conjuntos abiertos U_1, U_2 tales que

$$x_1 \in U_1, \qquad x_2 \in U_2 \quad y \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

Definición 7:

Un espacio topológico X es llamado ***separable*** si existe un subconjunto numerable D de X tal que $\overline{D} = X$

Definición 8:

Sea X un espacio topológico y $x \in X$.

- Un conjunto $N \subseteq X$ es llamado una vecindad de x en X si existe un conjunto abierto U con $x \in U \subseteq N$.
- Una *base de vecindades* en x es una familia $ß_x$ de vecindades de x (en X) tal que toda vecindad de x contiene algún miembro de $ß_x$.

Definición 9:

Un espacio topológico X es llamado ***primero numerable*** si X tiene una base de vecindades numerable en cada punto.

Definición 10:

Un espacio topológico X es llamado ***segundo numerable*** si existe una base numerable de abiertos para X .

Definición 11:

Un espacio topológico X es llamado ***secuencialmente compacto*** si X es *Hausdorff* y toda sucesión de puntos de X tiene una subsucesión convergente.

$\boldsymbol{\omega_1}$, el primer ordinal no numerable

Definición 12:

Llamamos de ω_1 un conjunto bien ordenado y no numerable tal que para cada $\propto \in \omega_1$, el conjunto $\{\beta \in \omega_1 : \beta < \alpha\}$ es numerable.

2.2.4 Cardinales

Definición 13:

Dos conjuntos A, B tienen la misma cardinalidad *(número cardinal, cardinal)*, y escribimos $A \approx B$ si existe una biyección $f : A \longrightarrow B$.

Definición 14:

El numero ordinal más pequeño con esta propiedad se llama cardinalidad de A y se denota por $|A|$. Esto es,

$$|A| = \min\{\propto : \propto \ es\ ordinal\ y\ A \ \approx \propto\}$$

2.3 Marco conceptual

2.3.1 Teoría de conjuntos

Es una rama de la lógica matemática que estudia las propiedades y relaciones de los conjuntos: colecciones abstractas de objetos, consideradas como objetos en sí mismas. Los conjuntos y sus operaciones más elementales son una herramienta de cualquier teoría matemática.

2.3.2 Teorema del buen orden

El teorema del buen orden establece que todo conjunto puede ser bien ordenado. Un conjunto X esta bien ordenado por un orden estricto si todo subconjunto no vacio de X tiene un elemento mínimo bajo dicho orden.

2.3.3 Espacio Topológico

Un espacio topológico es una estructura matemática que permite la definición formal de conceptos como convergencia, conectividad, continuidad, vecindad, usando subconjuntos de un conjunto dado.

2.3.4 Axioma de elección

En teoría de conjuntos, el axioma de elección es un axioma que postula que, para cada familia de conjuntos no vacíos, existe otro conjunto que contiene un elemento de cada uno de aquellos.

2.3.4.1 Conjunto de Bernstein

Un subconjunto B de R es un conjunto de Bernstein si tanto B como su complemento corta a cada cerrado no numerable. Esta propiedad hace que los conjuntos de Bernstein sean bastantes fieros, o en términos más finos, 'irregulares'.

2.4 Definiciones de términos básicos

2.4.1 Espacios Topológicos

Definición 15:

Un espacio topológico es una pareja (X, τ) tal que X es un conjunto y τ una colección de subconjuntos de X tales que satisfacen

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. $U_1, \ldots, U_n \in \tau \implies \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau$
3. $U_\alpha \in \tau,\ para\ todo\ \alpha \in I \implies \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$

Definición 16:

Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Decimos que A es cerrado si y solo si su complemento A^c es abierto. La cerradura $\bar{A}$ de A es la intersección de todos los cerrados que contiene a A, El interior $A°$ de A la definimos como la unión de todos los subconjuntos abiertos de A.

Definición 17:

Sea $a \in R^n$ y $r > 0$. Llamamos bola abierta de centro a y radio r al conjunto

$$B_r(a) = \{x \in R^n : d(x, a) < r\}$$

Definición 18:

Sea $a \in R^n$ y $r > 0$. Llamamos bola abierta de centro a y radio r al conjunto

$$B_r(a) = \{x \in R^n : d(x, a) \leq r\}$$

Definición 19:

Sea $A \subseteq R^n$ es abierto si para todo $x \in A$, existe $r \geq 0$ tal que $B_r(x) \subseteq A$.

Definición 20:

Un conjunto $A \subseteq R^n$ es cerrado si su complemento es un conjunto abierto.

2.4.2 Medida de Lebesgue

Se considera la medida m de Lebesgue en la recta real R.

2.4.3 Conjuntos medibles.

Se considera los conjuntos medibles los cuales forman el σ-álgebra, el cual contiene el σ-álgebra de Borel B.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1 Hipótesis

3.1.1 Hipótesis general

- Existen ejemplos de conjuntos en $\mathbb{R}$ no Borelianos y no Lebesgue medibles.

3.1.2 Hipótesis Específica

- Existen ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos
- Existen conjuntos en $\mathbb{R}$ no Lebesgue medible

3.2 Definición conceptual de variables.

3.2.1 Variable Independiente (I):

Conjuntos en $\mathbb{R}$

Dado el conjunto de los reales consideraremos a los conjuntos en $\mathbb{R}$ como todos los elementos del conjunto de partes de $\mathbb{R}$. El conjunto de partes de $\mathbb{R}$ en particular es el mayor σ-álgebra sobre los reales.

3.2.2 Variables dependientes (D):

Conjuntos Borelianos y conjuntos Lebesgue medibles

Un conjunto de Borel es un elemento de la llamada σ-álgebra de Borel, la cual no es más que la mínima σ-álgebra que contiene a una topología dada.

Un conjunto *B* de $\mathbb{R}^n$ se dirá medible si, para todo conjunto A, se verifica la siguiente identidad:

$$m^*(\mathrm{A}) = m^*(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + m^*(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}).$$

Donde m* es la medida exterior de Lebesgue.

3.2.1 Operacionalización de las variables

Variables	Dimensiones	Indicadores	Método	Técnica
I Conjuntos en $\mathbb{R}$	Topología Cardinalidad Lema de Zorn	Topología en ordinales Hipótesis del Continuo Principio de Elección	Método de escritorio o de biblioteca.	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación.
D	Conjuntos Borelianos Conjuntos Lebesgue medible Medida de conjuntos	Conjuntos abiertos. Medida exterior. σ-álgebras	Método de escritorio o de biblioteca.	Documentos cualitativos. Revisión bibliográfica. Trabajo con equipos de investigación.

Fuente: Elaboración propia

IV. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1 Tipo y diseño de investigación

4.1.1 Tipo de Investigación

La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios.

4.1.2 Diseño de la Investigación

La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo – deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración.

Se empezará definiendo los términos básicos relacionados a la topología y a la teoría de la medida, posteriormente se encontrará los resultados analizando la topología sobre los reales y estudiando las diferentes σ-álgebras que se pueden generar sobre ellos.

Finalmente se expondrán ejemplos que son Lebesgue medibles pero no Borelianos y en particular se construirán los conjuntos de Bernstein que ejemplifica un subconjunto de los reales que no es Lebesgue medible.

4.2 Método de investigación

Por la naturaleza de la investigación, al ser tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación.

4.3 Población y muestra

No se aplica en este tipo de proyecto.

4.4 Lugar de estudio

El lugar de estudio para el presente proyecto de investigación se desarrolló en la biblioteca especializada y laboratorio de la Facultad De Ciencias Naturales Y Matemática, biblioteca central de la Universidad Nacional Del Callao.

4.5 Técnicas e instrumentación para la recolección de información

La técnica aplicada al presente trabajo proyecto de investigación fue la técnica del análisis documentario, cualitativo. Ello se basa en el análisis de documentos existentes en artículos, libros, revistas científicas. Acorde a nuestra investigación no se aplica instrumento de recolección de información

4.6 Análisis y procesamiento de datos

Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)

4.7 Aspectos Éticos en Investigación.

El presente trabajo cumple las normas establecidas (artículo 427-438 del Código Penal, Ley sobre el Derecho de Autor-Decreto Legislativo N° 822) en nuestro país, no incurriendo en el delito contra la fe pública.

4.8 Si la orientación es hacia un proyecto de inversión, considera: Estudio técnico, Estudio económico-financiero, Estudio de la organización administrativa.

No se aplica para este tipo de proyecto.

4.9 Si el proyecto se orienta al impacto ambiental, considera: Área de estudio, Evaluación del impacto ambiental, Medidas ecológicas, Plan de supervisión ambiental.

No se aplica para este tipo de proyecto

VI. CRONOGRAMA DE ACTIVIDADES

CRONOGRAMA DE PROYECTO DE TESIS

Proyecto de tesis: "CONJUNTOS EN R NO BORELIANOS Y NO LEBESGUE MEDIBLES"
Tesistas Guia Rodriguez Lesly Alexandra
Valer Ruiz Juan Manuel
Fecha de Inicio: 03/05/2021
Fecha de término: 03/11/2022

ACTIVIDADES	INICIO	FINAL	DUR. (Semanas)	MAYO				JUNIO				JULIO				AGOSTO			
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Capacitación Teórica	**03/05/2021**	23/05/2021	**3**																
Componente 1: Recopilación de material bibliográfico, selección y análisis del tema.	**24/05/2021**	20/06/2021	**4**																
Componente 2: Infinitos conjuntos Lebesgue medibles pero no Borelianos.Conjuntos de Bernstein	**21/06/2021**	18/07/2021	**4**																
Análisis y discusión de resultados	**19/07/2021**	15/08/2021	**3**																
Digitalización y defensa de tesis	**16/08/2021**	**03/11/2022**	**2**																

LEYENDA
Controles y revisiones por asesor
Clases, revisiones y presentaciones de avance

VII. PRESUPUESTO

ESPECIFICACIONES	PORCENTAJE (%)	COSTO (S/)
Laptop	31,25	3000.00
Textos de especialidad	10,42	1000.00
Servicios de internet	4,17	400.00
Fotocopias y espiralados	1,04	100.00
Tipeos de impresión	2,08	200.00
Papel de impresión	1,04	100.00
Material de escritorio	4,17	400.00
Empastado de tesis	2,08	200.00
Ciclo tesis	43,75	4200.00
total	100	9600.00

Fuente: Elaboración Propia

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ciesielski, K. (1997). *Set Theory for the Working Mathematician.* England: Cambridge University Press, 1997.

Lefschetz, S. (2015). *Introduction to Topology.* United States: Princeton University Press.

Tomas, J. (2003). *Springer- Verlag Berlin Heidelberg.*

Levy, A. (1979). *Basic Set Theory.* New York: Springer- Verlag.

Mirimanoff, D. (1917). *Les antinomies de Russel et de Burali-Forti et le probleme fundamental de la theorie des ensembles. L'Enseignement Math.* 19: 37-52.

Leandro Aurichi.(2020). Topologia e conjuntos em exercicios. Disponible en: (http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/aurichi/exerc)

Royden, H. L. (1988). *Real Analysis.* 3d ed. New York: Macmillan.

Ryszard E. (1989). *General Topology.* Sigma Series in Pure Mathematics.

Geral B.(1999). *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applicagtions.* Wiley.

Stephen W. (2004). *General Topology.* Dover Publications,

VIII. ANEXOS

8.1 Matriz de consistencia

Problema	Objetivos	Hipótesis	Metodología	Variables
. **Problema General** ¿Existen ejemplos de conjuntos en R no Borelianos y no Lebesgue medibles?	**Objetivo General** Mostraremos ejemplos de conjuntos en R no Borelianos y no Lebesgue medibles.	**Hipótesis general** Existen ejemplos de conjuntos en R no Borelianos y no Lebesgue medibles.	**Tipo de Investigación** La investigación es de tipo básica, pura o fundamental, pues se utiliza las teorías existentes para profundizar en ellas, generando nuevos conocimientos o criterios. **Diseño de la Investigación** La investigación que se desarrolla presenta el tipo inductivo – deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. Se empezará definiendo los términos básicos relacionados a la topología y a la teoría de la medida, posteriormente se encontrará los resultados analizando la topología sobre los reales y estudiando las diferentes σ-álgebras que se pueden generar sobre ellos. Finalmente se expondrán ejemplos que son Lebesgue medibles pero no Borelianos y en particular se construirán los conjuntos de Bernstein que ejemplifica un subconjunto de los reales que no es Lebesgue medible. **Método de investigación** Por la naturaleza de la investigación, al ser tipo básica, el método empleado es el método de escritorio o de biblioteca, es decir, se realizará un análisis bibliográfico a profundidad con respecto a las teorías relacionadas al presente tema de investigación. **Población y muestra** Población: Conjuntos en R. Muestra: σ-álgebras en R **Lugar de estudio** Se puede considerar lugar de estudio todo espacio físico que contribuya en la elaboración del presente trabajo, por ejemplo, la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la UNAC, la Biblioteca Central de la UNAC, pero debido a la situación actual originado por el COVID-19 el lugar de estudio será en mi hogar. **Técnicas e instrumentación para la recolección de información** Para la realización de este trabajo de tesis se revisó bibliografía especializada y recopilación de información obtenida relacionada al tema de interés. **Análisis y procesamiento de datos** Por ser nuestro trabajo netamente abstracto, no se necesitó procedimientos de recolección de datos más que la revisión de bibliografía (libros, páginas web, paper, etc.)	**Variable 1**. Conjuntos en R **Variable 2** Conjuntos Borelianos Conjuntos Lebesgue medible
Problema Específico ¿Existen ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos? ¿Existen conjuntos en R no Lebesgue medibles?	**Objetivos Específicos** Mostraremos ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos. Mostraremos ejemplos de conjuntos en R no Lebesgue medibles	**Hipótesis Específica** Existen ejemplos de conjuntos Lebesgue medibles no Borelianos. Existen conjuntos en R no Lebesgue medible		

Fuente: Elaboración propia.